21/3/2018

Άσκηση Δείξτε ότι η S_3 δεν είναι αβελιανή, αλλά κάθε γνήσια υποομάδα της είναι αβελιανή!

Λύση:

$$S_3 = \{I, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ (1,2)(1,3) = (3,2,1) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \nparallel \\ \cdot\ (1,3)(1,2) = (3,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Δεν είναι αβελιανή!}$$

· Έστω $H < S_3$, γνήσια υποομάδα της S_3.

Αρκεί ν.δ.ο. η H είναι κυκλική $\longrightarrow$ αβελιανή!

· Έχω: $H < S_3 \xrightarrow{\text{Θ. Lagrange}} |H| \,\big|\, |S_3| = 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |H| \in \{1, 2, 3, \cancel{6}\}$$ → γνήσια υποομάδα

(i) $|H| = 1 \Rightarrow H = \{I\} = \langle I \rangle$ → Κυκλική!

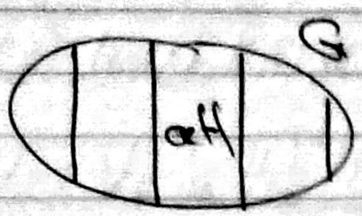
(ii) $|H| = 2 \Rightarrow$ Το 2: πρώτος $\Longrightarrow$ H: κυκλική!

(iii) $|H| = 3 \longrightarrow$ Το 3: πρώτος $\Longrightarrow$ H: κυκλική!

· Άρα, σε κάθε περίπτωση, η H: κυκλική!

· Όμως, κάθε κυκλική ομάδα, είναι αβελιανή.

· Άρα H: αβελιανή!



$\rightarrow |G| = |H| \cdot r \quad , H \leq G$

↳ Το πλήθος των αριστερών συμπλόκων

▶ **Ορισμός** Έστω $H \leq G$. Το πλήθος των αριστερών συμπλόκων (δεξιών συμπλόκων) της H στην G, ονομάζεται <u>δείκτης</u> της H στην G και συμβολίζεται με $(G:H)$

· <u>Συνεπώς</u> : $\boxed{|G| = |H| \cdot (G:H)}$

▶ **Ορισμός** Έστω G ομάδα και H υποομάδα της G. Η <u>H</u> λέγεται κανονική (ορθόθετη) υποομάδα της G, αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha H = H\alpha}, \text{ για κάθε } \alpha \in G$$

· <u>Συμβολισμός</u> : $\boxed{H \trianglelefteq G}$

▶ **Θεώρημα** <u>Έστω</u> G αβελιανή ομάδα. Τότε κάθε υποομάδα της είναι κανονική!

· <u>Απόδειξη</u> :

<u>Έχω</u>: $\alpha H = \{ah \mid h \in H\} \overset{\text{αβελιανή}}{=} \{ha \mid h \in H\} = H\alpha$.

· Άρα H: <u>κανονική της G</u>

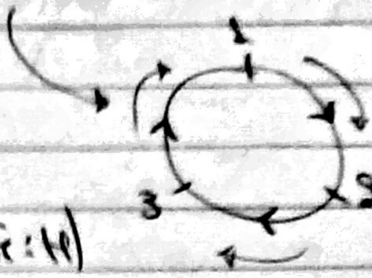
Δ Το H είναι ταυτόχρονα και <u>αριστερά</u> και <u>δεξιά</u> σύμπλοκο!!!

Παράδειγμα $S_3 = \{I, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.

· <u>Έστω</u>: $H_1 = \{I, (1,2)\} \rightsquigarrow \boxed{aH \neq Ha}, \forall a \in H$

· Τα αριστερά σύμπλοκα είναι διαφορετικά από τα δεξιά.

· <u>Έστω</u>: $H_2 = \{I, (1,2,3), (1,3,2)\} = \langle (1,2,3) \rangle = \langle (1,3,2) \rangle$



· <u>Αριστερά σύμπλοκα της H_2</u>:

· $IH_2 = H_2$

Δ $|S_3| = |H_2|(G:H)$

$$\Downarrow$$

$$6 = 3 \cdot (G:H) \rightsquigarrow \boxed{2: \text{σύμπλοκα}}$$

· $(1,2) \cdot H_2 = (1,2) \cdot \{I, (1,2,3), (1,3,2)\} = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$.

· <u>Δεξιά σύμπλοκα της H_2</u>:

· $H_2 \cdot I = H_2$

· $H_2 \cdot (1,2) = \ldots = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$

· <u>Συνεπώς</u>, τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα ταυτίζονται. Το πλήθος των στοιχείων τους όμως δεν μας απασχολεί με ποια σειρά είναι!!

△ • $G \trianglelefteq G \rightsquigarrow gG = G = Gg$

Η G είναι κανονική του εαυτού της

• $\{1\} \trianglelefteq G \rightsquigarrow g\{1\} = \{g \cdot 1\} = \{g\}$

$\qquad \|$

και: $\{1\} \cdot g = \{1 \cdot g\} = \{g\}$

△ Η υποομάδα που περιέχει ΜΟΝΟ το ουδέτερο, είναι κανονική της G.

▶ Ορισμός Μια ομάδα G λέγεται απλή, αν έχει ακριβώς δύο κανονικές υποομάδες!

▶ Ευθύ γινόμενο των G_1, G_2

• Θεωρώ $(G_1, *_1)$ και $(G_2, *_2)$. Τότε:

Καρτεσιανό γινόμενο → $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1 \wedge g_2 \in G_2\}$.

• Για $(\alpha_1, \alpha_2) \in G_1 \times G_2$ και $(b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$, έχω:

$$(\alpha_1, \alpha_2) * (b_1, b_2) = (\alpha_1 *_1 b_1, \alpha_2 *_2 b_2) \in G_1 \times G_2.$$

• Προσεταιριστικά:

$$\cdot\ ((\alpha_1, \alpha_2) * (b_1, b_2)) * (\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha_1 *_1 b_1, \alpha_2 *_2 b_2) * (\gamma_1, \gamma_2) =$$

$$= ((\alpha_1 *_1 b_1) *_1 \gamma_1, (\alpha_2 *_2 b_2) *_2 \gamma_2) \in G_1 \times G_2$$

(1)

• $(a_1, a_2) * \big((\beta_1, \beta_2) * (\gamma_1, \gamma_2)\big) = (a_1, a_2) * (\beta_1 *_1 \gamma_1, \beta_2 *_2 \gamma_2) =$ ②

$= \big(a_1 *_1 (\beta_1 *_1 \gamma_1), a_2 *_2 (\beta_2 *_2 \gamma_2)\big) \in G_1 \times G_2$

• Λόγω του προσεταιριστικού νόμου των G_1 και G_2,

οι ① και ② είναι <u>ίσες</u>!

• <u>Ουδέτερο</u>: Για $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$, έχω:

$(a_1, a_2) * (e_1, e_2) = (a_1 *_1 e_1, a_2 *_2 e_2) = (a_1, a_2)$ ✓

• <u>Αντίστροφο</u>: Για $(a_1^{-1}, a_2^{-1}) \in G_1 \times G_2$, έχω:

$(a_1, a_2) * (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1 *_1 a_1^{-1}, a_2 *_2 a_2^{-1}) = (e_1, e_2)$

• Άρα <u>$G_1 \times G_2$: ομάδα</u>!

△ • <u>Τάξη</u>: $|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

• $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \sim$ <u>Ευθύ</u> γινόμενο των <u>$G_1, G_2, \dots, G_n$</u>!

$\boxed{\text{• Παράδειγμα}}$ • $\mathbb{Z}_3 \times U(\mathbb{Z}_4) = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\} \times \{[1]_4, [3]_4\}$.

• <u>Τάξη</u>: $|\mathbb{Z}_3 \times U(\mathbb{Z}_4)| = |\mathbb{Z}_3| \cdot |U(\mathbb{Z}_4)| = 3 \cdot 2 = \boxed{6}$

• Ποιά είναι η τάξη του στοιχείου $([1]_3, [1]_4) \in \mathbb{Z}_3 \times U(\mathbb{Z}_4)$;

• Έχω: $([1]_3,[1]_4)^1 = ([1]_3,[1]_4)$.

$([1]_3,[1]_4)^2 = ([2]_3, [1]_4)$

και: $([1]_3,[1]_4)^3 = ([0]_3,[1]_4) = (e_1,e_2)$ ✓

Άρα: $\boxed{ord([1]_3,[1]_4) = 3}$

• Αντίστοιχα: ποιά είναι η τάξη του $([1]_3,[3]_4)$;

Έχω: $([1]_3,[3]_4)^2 = ([2]_3,[1]_4)$

$([1]_3,[3]_4)^3 = ([0]_3, [3]_4)$

και:

$([1]_3,[3]_4)^6 = ([0]_3,[9]_4) = ([0]_3,[1]_4) = (e_1,e_2)$

Άρα: $\boxed{ord([1]_3,[3]_4) = 6 = |\mathbb{Z}_3 \times U(\mathbb{Z}_4)|}$

⚠ Η $\mathbb{Z}_3 \times U(\mathbb{Z}_4)$ είναι αβελιανή, ως ευθύ γινόμενο αβελιανών ομάδων!!!

$\boxed{\text{▸ Παράδειγμα}}$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ⇝ Εδώ έχω ευθύ άθροισμα!

• $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5| = |\mathbb{Z}_2| \cdot |\mathbb{Z}_5| = \boxed{10}$

• Ποιά είναι η τάξη του $([1]_2,[1]_5) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$;

• Έχω: $([1]_2,[1]_5)^1 = ([1]_2,[1]_5)$

• $([1]_2,[1]_5)^2 = ([0]_2,[2]_5)$

• $([1]_2,[1]_5)^5 = ([1]_2,[0]_5)$

και: $([1]_2,[1]_5)^{10} = ([1]_2,[0]_5)\times([1]_2,[0]_5) = ([0]_2,[0]_5) = (e_1,e_2)$

Άρα: $\boxed{ord([1]_2,[1]_5) = 10}$

• Συνεπώς, το $([1]_2,[1]_5)$ είναι γεννήτορας της $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$!!!

• Όλοι οι γεννήτορες: $([1]_2,[1]_5)^k$, με $(k,10)=1$.

Δηλαδή: $([1]_2,[3]_5)$, $([1]_2,[2]_5)$, $([1],[4]_5)$

▸ Παράδειγμα $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2,[1]_2\}\times\{[0]_2,[1]_2\}$

$|\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2| = 4$

• Άρα $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 = \{([0],[0]),([1],[0]),([0],[1]),([1],[1])\}$.

Τάξεις: 1, 2, 2, 2

⚠ Παρ' όλο που η $\mathbb{Z}_2$ είναι κυκλική, η ομάδα $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ δεν είναι κυκλική!!!

⚠ Είναι αβελιανή, ως ευθύ γινόμενο (δηλαδή) αβελιανών!